

学校: _____ 准考证号: _____ 姓名: _____

(在此卷上答题无效)

高三诊断性测试

数 学

本试卷共4页。满分150分。

注意事项:

1. 答题前,考生务必在试题卷、答题卡规定的地方填写自己的准考证号、姓名。考生要认真核对答题卡上粘贴的条形码的“准考证号、姓名”与考生本人准考证号、姓名是否一致。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束,考生必须将试题卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A = \{x \in \mathbf{Z} \mid x^2 - x - 2 \leq 0\}$, $B = \{0, 1, 2, 3\}$, 则 $A \cap B =$
 A. $\{0, 1\}$ B. $\{0, 1, 2\}$ C. $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ D. $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
2. $\left(\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)^5$ 的展开式中的常数项为
 A. -160 B. -80 C. 80 D. 160
3. 设复数 z_1, z_2, z_3 满足 $z_3 \neq 0$, 且 $|z_1| = |z_2|$, 则
 A. $z_1 = \pm z_2$ B. $z_1^2 = z_2^2$ C. $z_1 \cdot z_3 = z_2 \cdot z_3$ D. $|z_1 \cdot z_3| = |z_2 \cdot z_3|$
4. 若 $a > 0, b > 0$, 则“ $a + b < 2$ ”的一个必要不充分条件是
 A. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} < 1$ B. $ab < 1$ C. $a^2 + b^2 < 2$ D. $\sqrt{a} < \sqrt{2-b}$
5. 深度学习是人工智能的一种具有代表性的实现方法,它是以神经网络为出发点的. 在神经网络优化中,指数衰减的学习率模型为 $L = L_0 D^{\frac{G}{G_0}}$, 其中 L 表示每一轮优化时使用的学习率, L_0 表示初始学习率, D 表示衰减系数, G 表示训练迭代轮数, G_0 表示衰减速度. 已知某个指数衰减的学习率模型的初始学习率为0.5, 衰减速度为22, 且当训练迭代轮数为22时, 学习率衰减为0.45, 则学习率衰减到0.05以下所需的训练迭代轮数至少为(参考数据: $\lg 2 \approx 0.3010, \lg 3 \approx 0.4771$)
 A. 11 B. 22 C. 227 D. 481
6. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 过 F 且倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$ 的直线交 C 于 A, B 两点, 线段 AB 中点的纵坐标为 $\sqrt{3}$, 则 $|AB| =$
 A. $\frac{8}{3}$ B. 4 C. 8 D. 24

7. 关于函数 $f(x) = A\sin(2x + \varphi)$, 有下列四个命题:

甲: $f(x)$ 在 $\left(5\pi, \frac{27\pi}{5}\right)$ 单调递增;

乙: $-\frac{\pi}{6}$ 是 $f(x)$ 的一个极小值点;

丙: $\frac{\pi}{3}$ 是 $f(x)$ 的一个极大值点;

丁: 函数 $y = f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位后所得图象关于 y 轴对称.

其中只有一个是假命题, 则该命题是

- A. 甲 B. 乙 C. 丙 D. 丁

8. 已知 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的函数, 且函数 $y = f(x+1) - 1$ 是奇函数, 当 $x < \frac{1}{2}$ 时, $f(x) = \ln(1-2x)$,

则曲线 $y = f(x)$ 在 $x=2$ 处的切线方程是

- A. $y = x - 4$ B. $y = x$ C. $y = -2x + 2$ D. $y = -2x + 6$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. “杂交水稻之父”袁隆平一生致力于杂交水稻技术的研究、应用与推广, 创建了超级杂交稻技术体系, 为我国粮食安全、农业科学发展和世界粮食供给作出了杰出贡献. 某杂交水稻种植研究所调查某地水稻的株高, 得出株高 ξ (单位: cm) 近似服从正态分布 $N(100, 10^2)$. 已知 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 时, 有 $P(|X - \mu| \leq \sigma) \approx 0.6827$, $P(|X - \mu| \leq 2\sigma) \approx 0.9545$, $P(|X - \mu| \leq 3\sigma) \approx 0.9973$. 下列说法正确的是

- A. 该地水稻的平均株高约为 100 cm
 B. 该地水稻株高的方差约为 100
 C. 该地株高超过 110 cm 的水稻约占 68.27%
 D. 该地株高低于 130 cm 的水稻约占 99.87%

10. 若 α, β 满足 $\sin \alpha = -\frac{1}{2}$, $\cos(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}$, 则 β 可以是

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{5\pi}{6}$ D. π

11. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, M, N, P 分别为棱 AB, CC_1, C_1D_1 的中点, $Q \in$ 平面 MNP , $B_1Q = AB$, 直线 B_1Q 和直线 MN 所成角为 θ , 则

- A. $MN \parallel AC_1$ B. θ 的最小值为 $\frac{\pi}{3}$
 C. A, M, N, P 四点共面 D. $PQ \parallel$ 平面 ACD_1

12. 已知 $\triangle A_n B_n C_n (n=1, 2, 3, \dots)$ 是直角三角形, A_n 是直角, 内角 A_n, B_n, C_n 所对的边分别为 a_n, b_n, c_n , 面积为 S_n . 若 $b_1 = 4, c_1 = 3, b_{n+1}^2 = \frac{a_{n+1}^2 + c_n^2}{3}, c_{n+1}^2 = \frac{a_{n+1}^2 + b_n^2}{3}$, 则

- A. $\{S_{2n}\}$ 是递增数列 B. $\{S_{2n-1}\}$ 是递减数列
 C. $\{b_n - c_n\}$ 存在最大项 D. $\{b_n - c_n\}$ 存在最小项

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知 \mathbf{a}, \mathbf{b} 是不共线的两个单位向量，则 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ 的夹角为_____.

14. 直线 $y = a(x + 2)$ 与曲线 $x^2 - y|y| = 1$ 恰有 2 个公共点，则实数 a 的取值范围为_____.

15. 写出一个同时具有下列性质①②③的函数 $f(x) =$ _____.

①定义域为 \mathbf{R} ；②值域为 $(-\infty, 1)$ ；③对任意 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ 且 $x_1 \neq x_2$ ，均有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$.

16. 《缀术》是中国南北朝时期的一部算经，汇集了祖冲之和祖暅父子的数学研究成果.《缀术》中提出的“缘幂势既同，则积不容异”被称为祖暅原理，其意思是：如果两等高的几何体在同高处被截得的两截面面积均相等，那么这两个几何体的体积相等.该原理常应用于计算某些几何体的体积.如图，某个西晋越窑卧足杯的上下底为互相平行的圆面，侧面为球面的一部分，上底直径为 $4\sqrt{6}$ cm，下底直径为 6 cm，上下底面间的距离为 3 cm，则该卧足杯侧面所在的球面的半径是_____cm；卧足杯的容积是_____cm³（杯的厚度忽略不计）.



四、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

已知等比数列 $\{a_n\}$ 的首项为 -2 ，前 n 项和为 S_n ，且 S_{n+2}, S_n, S_{n+1} 成等差数列.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $b_n = \left[\frac{n+1}{2} \right]$ ，求数列 $\{a_n b_n\}$ 的前 10 项和 T_{10} . ($[x]$ 表示不超过 x 的最大整数)

18. (12 分)

冬季两项是第 24 届北京冬奥会的比赛项目之一，它把越野滑雪和射击两种特点不同的竞赛项目结合在一起.其中 20km 男子个人赛的规则如下：

①共滑行 5 圈（每圈 4km），前 4 圈每滑行 1 圈射击一次，每次 5 发子弹；

②射击姿势及顺序为：第 1 圈滑行后卧射，第 2 圈滑行后立射，第 3 圈滑行后卧射，第 4 圈滑行后立射，第 5 圈滑行直达终点；

③如果选手有 n 发子弹未命中目标，将被罚时 n 分钟；

④最终用时为滑雪用时、射击用时和被罚时间之和，最终用时少者获胜.

已知甲、乙两人参加比赛，甲滑雪每圈比乙慢 36 秒，甲、乙两人每发子弹命中目标的概率分别为 $\frac{4}{5}$ 和

$\frac{3}{4}$. 假设甲、乙两人的射击用时相同，且每发子弹是否命中目标互不影响.

(1) 若在前三次射击中，甲、乙两人的被罚时间相同，求甲胜乙的概率；

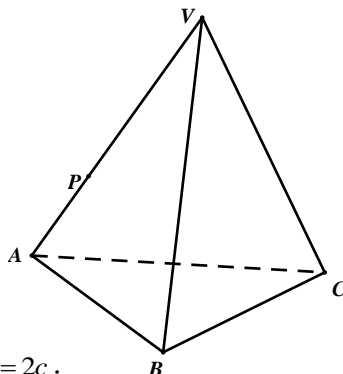
(2) 若仅从最终用时考虑，甲、乙两位选手哪个水平更高？说明理由.

19. (12分)

如图, 在三棱锥 $V-ABC$ 中, $\triangle VAB$ 和 $\triangle ABC$ 均是边长为 4 的等边三角形. P 是棱 VA 上的点, $VP = \frac{2}{3}VA$, 过 P 的平面 α 与直线 VC 垂直, 且平面 $\alpha \cap$ 平面 $VAB = l$.

(1) 在图中画出 l , 写出画法并说明理由;

(2) 若直线 VC 与平面 ABC 所成角的大小为 $\frac{\pi}{3}$, 求过 l 及点 C 的平面与平面 ABC 所成的锐二面角的余弦值.



20. (12分)

$\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , $a = 6$, $b + 12\cos B = 2c$.

(1) 求 A 的大小;

(2) M 为 $\triangle ABC$ 内一点, AM 的延长线交 BC 于点 D , _____, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

请在下列三个条件中选择一个作为已知条件补充在横线上, 使 $\triangle ABC$ 存在, 并解决问题.

① M 为 $\triangle ABC$ 的外心, $AM = 4$;

② M 为 $\triangle ABC$ 的垂心, $MD = \sqrt{3}$;

③ M 为 $\triangle ABC$ 的内心, $AD = 3\sqrt{3}$.

21. (12分)

已知椭圆 C 的中心为 O , 离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 圆 O 在 C 的内部, 半径为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$. P, Q 分别为 C 和圆 O 上的动点, 且 P, Q 两点的最小距离为 $1 - \frac{\sqrt{6}}{3}$.

(1) 建立适当的坐标系, 求 C 的方程;

(2) A, B 是 C 上不同的两点, 且直线 AB 与以 OA 为直径的圆的一个交点在圆 O 上. 求证: 以 AB 为直径的圆过定点.

22. (12分)

已知函数 $f(x) = \ln x - \frac{a+1}{x}$, $g(x) = a(x-2)e^{1-x} - 1$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $0 < a < \frac{5}{3}$ 时, 是否存在 x_1, x_2 , 且 $x_1 \neq x_2$, 使得 $f(x_i) = g(x_i) (i=1, 2)$? 证明你的结论.

高三诊断性测试 数学参考答案及评分细则

评分说明:

1. 本解答给出了一种或几种解法供参考, 如果考生的解法与本解答不同, 可根据试题的主要考查内容比照评分标准制定相应的评分细则。

2. 对计算题, 当考生的解答在某一步出现错误时, 如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度, 可视影响的程度决定后继部分的给分, 但不得超过该部分正确解答应给分数的一半; 如果后继部分的解答有较严重的错误, 就不再给分。

3. 解答右端所注分数, 表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

4. 只给整数分数。选择题和填空题不给中间分。

一、选择题: 本大题考查基础知识和基本运算。每小题 5 分, 满分 40 分。

1. B 2. B 3. D 4. B 5. D 6. C 7. A 8. D

二、选择题: 本大题考查基础知识和基本运算。每小题 5 分, 满分 20 分。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. ABD 10. AC 11. BD 12. ACD

三、填空题: 本大题考查基础知识和基本运算。每小题 5 分, 满分 20 分。

13. $\frac{\pi}{2}$; 14. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$; 15. 答案不唯一, 如: $f(x) = 1 - \frac{1}{2^x}, f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x}, x > 1, \\ x - 1, x \leq 1 \end{cases}$ 等;

16. 5; 54π .

四、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. 本小题主要考查等差数列、等比数列、递推数列及数列求和等基础知识, 考查运算求解能力、逻辑推理能力和创新能力等, 考查化归与转化思想、分类与整合思想、函数与方程思想、特殊与一般思想等, 考查逻辑推理、数学运算等核心素养, 体现基础性和创新性。满分 10 分。

解法一: (1) 因为 S_{n+2}, S_n, S_{n+1} 成等差数列, 所以 $S_n - S_{n+2} = S_{n+1} - S_n$,1 分

所以 $-a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1}$,3 分

即 $a_{n+2} = -2a_{n+1}$, 设 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 则 $q = -2$,4 分

所以 $a_n = -2 \times (-2)^{n-1} = (-2)^n$6 分

(2) 依题意, $b_{2k-1} = \left[\frac{2k-1+1}{2}\right] = k (k \in \mathbf{N}^*), b_{2k} = \left[\frac{2k+1}{2}\right] = k (k \in \mathbf{N}^*),$ 7 分

所以 $T_{10} = (a_1b_1 + a_3b_3 + \dots + a_9b_9) + (a_2b_2 + a_4b_4 + \dots + a_{10}b_{10})$ 8 分

$$= (a_1 + 2a_3 + \dots + 5a_9) + (a_2 + 2a_4 + \dots + 5a_{10})$$

$$= (a_1 + 2a_3 + \dots + 5a_9) - 2(a_1 + 2a_3 + \dots + 5a_9)$$
9 分

$$= -(a_1 + 2a_3 + \dots + 5a_9)$$

$$= 1 \times 2 + 2 \times 2^3 + \dots + 5 \times 2^9$$

所以 $4T_{10} = 1 \times 2^3 + 2 \times 2^5 + \dots + 5 \times 2^{11},$

$$\text{两式相减得 } -3T_{10} = 2 + 2^3 + 2^5 + \dots + 2^9 - 5 \times 2^{11} = \frac{2 \times (1 - 4^5)}{1 - 4} - 5 \times 2^{11} = -\frac{14}{3} \times 2^{11} - \frac{2}{3},$$

$$\text{所以 } T_{10} = \frac{14}{9} \times 2^{11} + \frac{2}{9} = 3186. \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

解法二：(1) 因为 S_{n+2}, S_n, S_{n+1} 成等差数列，所以 $S_{n+1} + S_{n+2} = 2S_n$ ，
1 分

设 $\{a_n\}$ 的公比为 q ，

①若 $q=1$ ，则 $a_n = -2, S_n = -2n, S_{n+1} + S_{n+2} = -4n - 6, 2S_n = -4n$ ，所以 $S_{n+1} + S_{n+2} \neq 2S_n$ ，
 与 $S_{n+1} + S_{n+2} = 2S_n$ 矛盾，不合题意；2 分

②若 $q \neq 1$ ，则 $S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}, S_{n+1} = \frac{a_1(1 - q^{n+1})}{1 - q}, S_{n+2} = \frac{a_1(1 - q^{n+2})}{1 - q}$ ，3 分

$$\text{所以 } \frac{a_1(1 - q^{n+1})}{1 - q} + \frac{a_1(1 - q^{n+2})}{1 - q} = \frac{2a_1(1 - q^n)}{1 - q}, \text{ 整理得, } q^{n+1} + q^{n+2} = 2q^n, \text{ 即 } q^2 + q - 2 = 0,$$

解得 $q=1$ (舍去) 或 $q=-2$ ，4 分

$$\text{所以 } a_n = -2 \times (-2)^{n-1} = (-2)^n. \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

(2) 依题意， $b_{2k-1} = \left[\frac{2k-1+1}{2} \right] = k (k \in \mathbf{N}^*), b_{2k} = \left[\frac{2k+1}{2} \right] = k (k \in \mathbf{N}^*), \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

$$\text{所以 } T_{10} = (a_1b_1 + a_2b_2) + (a_3b_3 + a_4b_4) + (a_5b_5 + a_6b_6) + (a_7b_7 + a_8b_8) + (a_9b_9 + a_{10}b_{10}) \quad \dots 8 \text{ 分}$$

$$= (a_1 + a_2) + 2(a_3 + a_4) + 3(a_5 + a_6) + 4(a_7 + a_8) + 5(a_9 + a_{10}) \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$= 1 \times [(-2) + (-2)^2] + 2 \times [(-2)^3 + (-2)^4] + 3 \times [(-2)^5 + (-2)^6]$$

$$+ 4 \times [(-2)^7 + (-2)^8] + 5 \times [(-2)^9 + (-2)^{10}]$$

$$= 1 \times 2 + 2 \times 2^3 + 3 \times 2^5 + 4 \times 2^7 + 5 \times 2^9$$

$$= 2 + 16 + 96 + 512 + 2560$$

$$= 3186. \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

解法三：(1) 因为 S_{n+2}, S_n, S_{n+1} 成等差数列，所以 $2S_n = S_{n+2} + S_{n+1}$ ，1 分

当 $n=1$ 时， $2S_1 = S_3 + S_2$ ， 化简得 $a_3 = -2a_2$ ，2 分

设 $\{a_n\}$ 的公比为 q ， 所以 $q = -2$ ，4 分

$$\text{当 } q = -2 \text{ 时, } S_n = \frac{-2 - (-2)^{n+1}}{3}, \text{ 因此 } 2S_n = \frac{2[-2 - (-2)^{n+1}]}{3},$$

$$S_{n+2} + S_{n+1} = \frac{-2 - (-2)^{n+3}}{3} + \frac{-2 - (-2)^{n+2}}{3} = \frac{-4 + (-2)^{n+2}}{3} = \frac{2[-2 - (-2)^{n+1}]}{3},$$

满足 $2S_n = S_{n+2} + S_{n+1}$ ， 故 $q = -2$ 符合题意.

$$\text{所以 } a_n = -2 \times (-2)^{n-1} = (-2)^n. \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

(2) 依题意, $b_1 = 1, b_2 = 1, b_3 = 2, b_4 = 2, b_5 = 3, b_6 = 3, b_7 = 4, b_8 = 4, b_9 = 5, b_{10} = 5,$

..... 7 分

所以

$$T_{10} = -2 + (-2)^2 + 2 \times (-2)^3 + 2 \times (-2)^4 + 3 \times (-2)^5 + 3 \times (-2)^6 + 4 \times (-2)^7 + 4 \times (-2)^8 + 5 \times (-2)^9 + 5 \times (-2)^{10}$$

..... 8 分

$$= [-2 + (-2)^2] + 2 \times [(-2)^3 + (-2)^4] + 3 \times [(-2)^5 + (-2)^6] + 4 \times [(-2)^7 + (-2)^8] + 5 \times [(-2)^9 + (-2)^{10}]$$

..... 9 分

$$= 2 + 2^4 + 3 \times 2^5 + 4 \times 2^7 + 5 \times 2^9$$

$$= 2 + 16 + 96 + 512 + 2560$$

$$= 3186. \text{ 10 分}$$

18. 本小题主要考查独立事件的概率、互斥事件的概率, 二项分布、数学期望等基础知识; 考查数学建模能力, 运算求解能力, 逻辑推理能力, 创新能力以及阅读能力等; 考查统计与概率思想、分类与整合思想等; 考查数学抽象, 数学建模和数学运算等核心素养; 体现应用性和创新性. 满分 12 分.

解法一: (1) 甲滑雪用时比乙多 $5 \times 36 = 180$ 秒 = 3 分钟, 因为前三次射击, 甲、乙两人的被罚时间相同, 所以在第四次射击中, 甲至少要比乙多命中 4 发子弹.

设“甲胜乙”为事件 A, “在第四次射击中, 甲有 4 发子弹命中目标, 乙均未命中目标”为事件 B,

“在第四次射击中, 甲有 5 发子弹命中目标, 乙至多有 1 发子弹命中目标”为事件 C, 1 分

依题意, 事件 B 和事件 C 是互斥事件, $A = B + C,$ 2 分

$$P(B) = C_5^1 \frac{1}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^5, P(C) = \left(\frac{4}{5}\right)^5 \times \left[\left(\frac{1}{4}\right)^5 + C_5^1 \left(\frac{1}{4}\right)^4 \times \frac{3}{4}\right], \text{ 4 分}$$

$$\text{所以, } P(A) = P(B) + P(C) = \frac{69}{12500}.$$

即甲胜乙的概率为 $\frac{69}{12500}.$ 5 分

- (2) 依题意得, 甲选手在比赛中未击中目标的子弹数为 $X,$ 乙选手在比赛中未击中目标的子弹数为 $Y,$ 则 $X \sim B\left(20, \frac{1}{5}\right), Y \sim B\left(20, \frac{1}{4}\right),$ 7 分

所以甲被罚时间的期望为 $1 \times EX = 1 \times 20 \times \frac{1}{5} = 4$ (分钟), 8 分

乙被罚时间的期望为 $1 \times EY = 1 \times 20 \times \frac{1}{4} = 5$ (分钟), 9 分

又在赛道上甲选手滑行时间慢 3 分钟,

所以甲最终用时的期望比乙多 2 分钟. 11 分

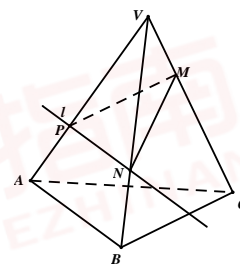
因此, 仅从最终用时考虑, 乙选手水平更高. 12 分

解法二: (1) 同解法一. 5 分

- (2) 设甲在一次射击中命中目标的子弹数为 ξ , 则 $\xi \sim B\left(5, \frac{4}{5}\right)$, 所以 $E\xi = 5 \times \frac{4}{5} = 4$, 所以甲在四次射击中命中目标的子弹数的期望为 $4E\xi = 16$,7分
- 设乙在一次射击中命中目标的子弹数为 η , 则 $\eta \sim B\left(5, \frac{3}{4}\right)$, 所以 $E\eta = 5 \times \frac{3}{4} = \frac{15}{4}$, 所以乙在四次射击中命中目标的子弹数的期望为 $4E\eta = 15$,9分
- 所以在四次射击中, 甲命中目标的子弹数的期望比乙多 1, 所以乙被罚时间的期望比甲多 1 分钟, 又因为在赛道上甲的滑行时间比乙慢 3 分钟, 所以甲最终用时的期望比乙多 2 分钟,11分
- 因此, 仅从最终用时考虑, 乙选手水平更高.12分

19. 本小题主要考查直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系, 直线与平面所成角、二面角等基础知识; 考查空间想象能力, 逻辑推理能力, 运算求解能力等; 考查化归与转化思想, 数形结合思想, 函数与方程思想等; 考查直观想象, 逻辑推理, 数学运算等核心素养; 体现基础性和综合性. 满分 12 分.

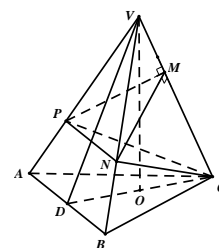
解法一: (1) 如图, 在 $\triangle VAC$ 内过 P 作 $PM \perp VC$, 垂足为 M ,
在 $\triangle VBC$ 内过 M 作 $MN \perp VC$ 交 VB 于 N ,
连结 PN , 则直线 PN 即为直线 l2分



理由如下: 因为 $PM \perp VC$, $MN \perp VC$, $PM \cap MN = M$,
所以 $VC \perp$ 平面 PMN ,
由于过空间一点与已知直线垂直的平面有且只有一个,
所以平面 PMN 与平面 α 重合,
因为平面 $PMN \cap$ 平面 $VAB = PN$, 所以直线 PN 即为直线 l4分

- (2) 因为 $\triangle VAB$ 和 $\triangle ABC$ 均为等边三角形,
所以 $VA = VB, AC = BC$, 又因为 $VC = VC$, 所以 $\triangle VAC \cong \triangle VBC$, 所以 $\angle PVM = \angle NVM$,
又 $VM = VM$, 所以 $\text{Rt}\triangle VPM \cong \text{Rt}\triangle VNM$, 所以 $VP = VN$, 所以 $VN = \frac{2}{3}VB$5分

如图, 设 AB 的中点为 D , 连结 VD, CD ,
因为 $\triangle VAB$ 和 $\triangle ABC$ 均为等边三角形,
所以 $VA = VB, AC = BC$, 所以 $AB \perp VD, AB \perp CD$,
又因为 $VD \cap CD = D$, 所以 $AB \perp$ 平面 VCD , 因为 $AB \subset$ 平面 ABC ,
所以平面 $ABC \perp$ 平面 VCD .



在 $\triangle VCD$ 中, 作 $VO \perp CD$, 垂足为 O ,
因为平面 $ABC \cap$ 平面 $VCD = CD$, $VO \subset$ 平面 VCD ,
所以 $VO \perp$ 平面 ABC ,
所以 $\angle VCD$ 是直线 VC 与平面 ABC 所成的角, 所以 $\angle VCD = \frac{\pi}{3}$7分

因为 $\triangle VAB$ 和 $\triangle ABC$ 均是边长为 4 的等边三角形, 所以 $VD = DC = 2\sqrt{3}$,
所以 $\triangle VCD$ 是等边三角形, 所以 $VO = 3$, $DO = OC = \sqrt{3}$.
以 O 为原点, 分别以 $\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OV}$ 的方向为 y 轴和 z 轴正方向建立如图所示的空间直角坐标

系 $O-xyz$,

则 $A(-2, -\sqrt{3}, 0), B(2, -\sqrt{3}, 0), C(0, \sqrt{3}, 0), V(0, 0, 3)$, 8分

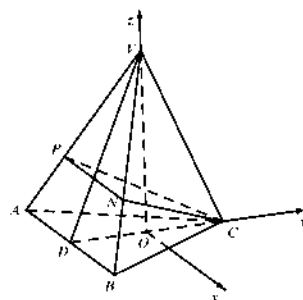
所以 $\overrightarrow{CV} = (0, -\sqrt{3}, 3), \overrightarrow{CA} = (-2, -2\sqrt{3}, 0), \overrightarrow{AB} = (4, 0, 0)$,

$$\overrightarrow{CP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CV} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CA} = \left(-\frac{4}{3}, -\frac{5\sqrt{3}}{3}, 1\right), \overrightarrow{PN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \left(\frac{8}{3}, 0, 0\right).$$

过 l 及点 C 的平面为平面 CPN ,

设平面 CPN 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \overrightarrow{CP} \cdot \mathbf{n} = 0, \\ \overrightarrow{PN} \cdot \mathbf{n} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} -\frac{4}{3}x - \frac{5\sqrt{3}}{3}y + z = 0, \\ \frac{8}{3}x = 0. \end{cases} \text{ 取 } \mathbf{n} = (0, \sqrt{3}, 5),$$



即平面 CPN 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (0, \sqrt{3}, 5)$ 10分

易知, 平面 ABC 的一个法向量为 $\mathbf{m} = (0, 0, 1)$, 11分

$$\text{所以 } \cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| \cdot |\mathbf{n}|} = \frac{5}{2\sqrt{7}} = \frac{5\sqrt{7}}{14},$$

所以过 l 及点 C 的平面与平面 ABC 所成的锐二面角的余弦值为 $\frac{5\sqrt{7}}{14}$ 12分

解法二: (1) 如图, 在 $\triangle VAB$ 内过 P 作 $PN \parallel AB$, 交 VB 于 N ,

则直线 PN 即为直线 l 2分

理由如下:

取 VC 的中点 Q , 连结 AQ, BQ ,

因为 $\triangle VAB$ 和 $\triangle ABC$ 均为等边三角形,

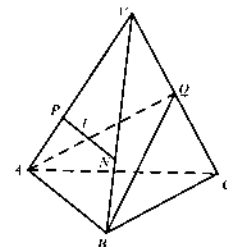
所以 $VA = AC, VB = BC$, 所以 $VC \perp AQ, VC \perp BQ$,

又因为 $AQ \cap BQ = Q$, 所以 $VC \perp$ 平面 ABQ ,

又因为 $VC \perp$ 平面 α , 所以平面 $\alpha \parallel$ 平面 ABQ ,

又因为平面 $\alpha \cap$ 平面 $VAB = l$, 平面 $ABQ \cap$ 平面 $VAB = AB$,

所以 $AB \parallel l$, 所以直线 PN 即为直线 l 4分



(2) 由 (1) 知, $PN \parallel AB$, 因为 $VP = \frac{2}{3}VA$, 所以 $VN = \frac{2}{3}VB$ 5分

设 AB 的中点为 D , 连结 VD , 交 PN 于 G , 连结 CG ,

因为 $\triangle VAB$ 和 $\triangle ABC$ 均为等边三角形,

所以 $VA = VB, AC = BC$, 所以 $AB \perp VD, AB \perp CD$,

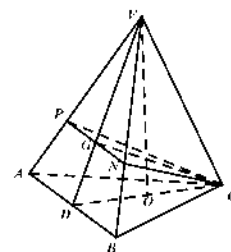
又因为 $VD \cap CD = D$,

所以 $AB \perp$ 平面 VCD , $AB \subset$ 平面 ABC ,

所以平面 $ABC \perp$ 平面 VCD .

在 $\triangle VCD$ 中, 作 $VO \perp CD$, 垂足为 O ,

因为平面 $ABC \cap$ 平面 $VCD = CD$, $VO \subset$ 平面 VCD , 所以 $VO \perp$ 平面 ABC ,



所以 $\angle VCD$ 是直线 VC 与平面 ABC 所成的角, 所以 $\angle VCD = \frac{\pi}{3}$,7 分

因为 $\triangle VAB$ 和 $\triangle ABC$ 均是边长为 4 的等边三角形, 所以 $VD = DC = 2\sqrt{3}$, $\angle VDC = \frac{\pi}{3}$,

因为 $AB \parallel PN$, 所以 $DG = \frac{1}{3}DV = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. 由 (1) 知, 过 l 及点 C 的平面为平面 CPN ,

因为 $AB \not\subset$ 平面 CPN , $PN \subset$ 平面 CPN , 所以 $AB \parallel$ 平面 CPN ,8 分

设平面 $CPN \cap$ 平面 $ABC = l'$, 因为 $AB \subset$ 平面 ABC , 所以 $AB \parallel l'$,

因为 $AB \perp$ 平面 VCD , $CG \subset$ 平面 VCD , $CD \subset$ 平面 VCD , 所以 $AB \perp CG, AB \perp CD$,

所以 $CG \perp l', CD \perp l'$, 又因为 $CG \subset$ 平面 CPN , $CD \subset$ 平面 ABC ,

所以 $\angle GCD$ 为平面 CPN 与平面 ABC 所成的锐二面角的平面角,10 分

在 $\triangle GCD$ 中, 由余弦定理得, $CG^2 = DG^2 + DC^2 - 2DG \cdot DC \cdot \cos \angle GDC$, $CG = \frac{2\sqrt{21}}{3}$,

.....11 分

$$\text{所以 } \cos \angle GCD = \frac{CG^2 + DC^2 - DG^2}{2CG \cdot DC} = \frac{5\sqrt{7}}{14},$$

所以过 l 及点 C 的平面与平面 ABC 所成的锐二面角的余弦值为 $\frac{5\sqrt{7}}{14}$12 分

20. 本小题主要考查正弦定理、余弦定理及三角恒等变换等基础知识, 考查逻辑推理能力、运算求解能力等, 考查化归与转化思想、函数与方程思想、数形结合思想等, 考查数学运算、逻辑推理等核心素养, 体现基础性和综合性. 满分 12 分.

解法一: (1) 在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理得 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$,1 分

又因为 $a = 6$, $b + 12\cos B = 2c$,

$$\text{所以 } b + 12 \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = 2c, \text{2 分}$$

整理得 $b^2 + c^2 - 36 = bc$3 分

在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理得 $b^2 + c^2 - 36 = 2bc \cos A$,

$$\text{所以 } bc = 2bc \cos A, \text{ 即 } \cos A = \frac{1}{2}. \text{4 分}$$

又因为 $A \in (0, \pi)$, 所以 $A = \frac{\pi}{3}$5 分

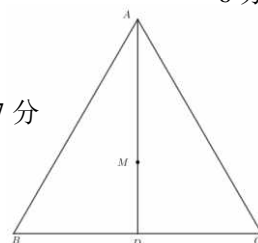
(2) 选③.6 分

因为 M 为 $\triangle ABC$ 的内心, 所以 $\angle BAD = \angle CAD = \frac{1}{2} \angle BAC = \frac{\pi}{6}$,

由 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD}$,7 分

$$\text{得 } \frac{1}{2}bc \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}c \cdot AD \sin \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}b \cdot AD \sin \frac{\pi}{6},$$

$$\text{因为 } AD = 3\sqrt{3}, \text{ 所以 } \frac{\sqrt{3}}{2}bc = 3\sqrt{3} \times \frac{1}{2}(b+c), \text{ 即 } b+c = \frac{bc}{3} \text{8 分}$$



由(1)可得 $b^2 + c^2 - 36 = bc$, 即 $(b+c)^2 - 3bc = 36$,9分

所以 $\frac{(bc)^2}{9} - 3bc - 36 = 0$, 即 $(bc+9)(\frac{bc}{9}-4) = 0$,10分

又因为 $bc > 0$, 所以 $bc = 36$,11分

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \times 36 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$12分

解法二: (1) 因为 $a = 6$, $b + 12 \cos B = 2c$,

所以 $b + 2a \cos B = 2c$,1分

在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理得 $\sin B + 2 \sin A \cos B = 2 \sin C$,

即 $\sin B + 2 \sin A \cos B = 2 \sin(A+B)$,2分

即 $\sin B + 2 \sin A \cos B = 2 \sin A \cos B + 2 \cos A \sin B$,

即 $\sin B = 2 \cos A \sin B$,3分

因为 $B \in (0, \pi)$,

所以 $\sin B \neq 0$, 故 $\cos A = \frac{1}{2}$4分

又因为 $A \in (0, \pi)$, 所以 $A = \frac{\pi}{3}$5分

(2) 选②.6分

因为 M 为 $\triangle ABC$ 的垂心,

所以 $\angle BMD = \frac{\pi}{2} - \angle MBD = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \angle ACB\right) = \angle ACB$, 又 $MD = \sqrt{3}$,7分

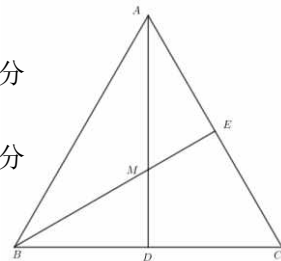
所以在 $\triangle MBD$ 中, $BD = MD \cdot \tan \angle BMD = \sqrt{3} \tan \angle ACB$,

同理可得 $CD = \sqrt{3} \tan \angle ABC$,8分

又因为 $BD + CD = 6$, 所以 $\sqrt{3} \tan \angle ABC + \sqrt{3} \tan \angle ACB = 6$, 即

$\tan \angle ABC + \tan \angle ACB = 2\sqrt{3}$,9分

又因为在 $\triangle ABC$ 中, $\tan(\angle ABC + \angle ACB) = -\tan \angle BAC = -\sqrt{3}$,



所以 $\frac{\tan \angle ABC + \tan \angle ACB}{1 - \tan \angle ABC \tan \angle ACB} = -\sqrt{3}$,

因此 $\tan \angle ABC \tan \angle ACB = 3$10分

故 $\tan \angle ABC, \tan \angle ACB$ 为方程 $x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 = 0$ 两根, 即 $\tan \angle ABC = \tan \angle ACB = \sqrt{3}$,

因为 $\angle ABC, \angle ACB \in (0, \pi)$,

所以 $\angle ABC = \angle ACB = \frac{\pi}{3}$, 所以 $\triangle ABC$ 为等边三角形,11分

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 6^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$12分

解法三: (1) 同解法一.5分

(2) 选②.6分

因为 M 为 $\triangle ABC$ 的垂心,

所以 $\angle AMB = \pi - \angle ACB$, $\angle ABM = \frac{\pi}{2} - \angle BAC = \frac{\pi}{6}$,8分

所以在 $\triangle ABM$ 中, 由正弦定理得 $\frac{AM}{\sin \angle ABM} = \frac{AB}{\sin \angle AMB}$,

即 $\frac{AM}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{AB}{\sin \angle ACB}$9分

又因为在 $\triangle ABC$ 中,

由正弦定理得 $\frac{AB}{\sin \angle ACB} = \frac{BC}{\sin \frac{\pi}{3}}$,10分

所以 $\frac{AM}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{BC}{\sin \frac{\pi}{3}}$, 因为 $a = 6$, 所以 $AM = 2\sqrt{3}$11分

又因为 $MD = \sqrt{3}$, 所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}a \cdot AD = \frac{1}{2} \times 6 \times (2\sqrt{3} + \sqrt{3}) = 9\sqrt{3}$12分

解法四: (1) 同解法一.5分

(2) 选③.6分

因为 M 为 $\triangle ABC$ 的内心, 所以 $\angle BAD = \angle CAD = \frac{1}{2} \angle BAC = \frac{\pi}{6}$.

在 $\triangle ABD$ 中, 由正弦定理得 $\frac{BD}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{AD}{\sin B}$, 因为 $AD = 3\sqrt{3}$, 所以 $2BD = \frac{3\sqrt{3}}{\sin B}$,

同理可得 $2CD = \frac{3\sqrt{3}}{\sin C} = \frac{3\sqrt{3}}{\sin(B + \frac{\pi}{3})}$7分

又因为 $BD + CD = 6$, 所以 $\frac{3\sqrt{3}}{\sin B} + \frac{3\sqrt{3}}{\sin(B + \frac{\pi}{3})} = 12$,

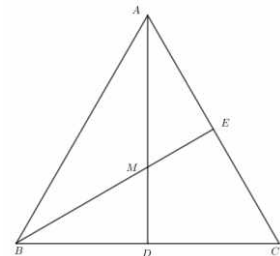
即 $4 \sin B \sin(B + \frac{\pi}{3}) = \sqrt{3} \left[\sin B + \sin(B + \frac{\pi}{3}) \right]$,

即 $4 \sin B \sin(B + \frac{\pi}{3}) = \sqrt{3} \left(\sin B + \frac{1}{2} \sin B + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos B \right)$,8分

即 $4 \sin B \sin(B + \frac{\pi}{3}) = 3 \sin(B + \frac{\pi}{6})$,

即 $4 \sin \left[(B + \frac{\pi}{6}) - \frac{\pi}{6} \right] \sin \left[(B + \frac{\pi}{6}) + \frac{\pi}{6} \right] = 3 \sin(B + \frac{\pi}{6})$,9分

即 $4 \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \sin(B + \frac{\pi}{6}) - \frac{1}{2} \cos(B + \frac{\pi}{6}) \right] \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \sin(B + \frac{\pi}{6}) + \frac{1}{2} \cos(B + \frac{\pi}{6}) \right] = 3 \sin(B + \frac{\pi}{6})$,



$$\text{即 } 4\left[\frac{3}{4}\sin^2\left(B+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{4}\cos^2\left(B+\frac{\pi}{6}\right)\right]=3\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right),$$

$$\text{即 } 4\sin^2\left(B+\frac{\pi}{6}\right)-3\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)-1=0, \text{ 即 } \left[\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)-1\right]\left[4\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)+1\right]=0, \dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } A=\frac{\pi}{3}, \text{ 所以 } 0 < B < \frac{2\pi}{3}, \text{ 所以 } B+\frac{\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right),$$

$$\text{所以 } \sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right) > 0, \text{ 故 } \sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)=1,$$

$$\text{即 } B+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}, \text{ 即 } B=\frac{\pi}{3}, \text{ 所以 } \triangle ABC \text{ 为等边三角形, } \dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 6^2\times \frac{\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{3}. \dots\dots 12 \text{ 分}$$

解法五：(1) 同解法一. $\dots\dots 5$ 分

(2) 选③. $\dots\dots 6$ 分

因为 M 为 $\triangle ABC$ 的内心，所以 $\angle BAD = \angle CAD = \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{\pi}{6}$. 又因为 $AD = 3\sqrt{3}$,

在 $\triangle ABD$ 中，由余弦定理得 $BD^2 = c^2 + 27 - 2 \times 3\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}c = c^2 - 9c + 27$,

同理可得 $CD^2 = b^2 - 9b + 27$. $\dots\dots 7$ 分

$$\text{又因为 } \frac{BD}{CD} = \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin \frac{\pi}{6}}{\frac{1}{2} \cdot AC \cdot AD \cdot \sin \frac{\pi}{6}} = \frac{AB}{AC},$$

$$\text{所以 } \frac{c^2 - 9c + 27}{b^2 - 9b + 27} = \frac{c^2}{b^2}, \text{ 即 } (b-c)[3(b+c) - bc] = 0,$$

$$\text{故 } b=c \text{ 或 } b+c = \frac{bc}{3}. \dots\dots 8 \text{ 分}$$

(i) 当 $b=c$ 时， $\triangle ABC$ 为等边三角形，所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 6^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$.

(ii) 当 $b+c = \frac{bc}{3}$ 时，由 (1) 知 $b^2 + c^2 - 36 = bc$ ，即 $(b+c)^2 - 3bc = 36$, $\dots\dots 9$ 分

$$\text{所以 } \frac{(bc)^2}{9} - 3bc - 36 = 0, \text{ 即 } (bc+9)\left(\frac{bc}{9} - 4\right) = 0, \dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } bc > 0, \text{ 所以 } bc = 36. \dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{又因为 } A = \frac{\pi}{3}, \text{ 所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \times 36 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}.$$

综上所述， $S_{\triangle ABC} = 9\sqrt{3}$. $\dots\dots 12$ 分

说明：设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R ，则在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理得

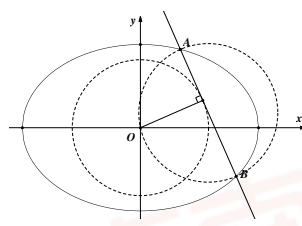


$$2R = \frac{BC}{\sin A} = \frac{6}{\sin \frac{\pi}{3}} = 4\sqrt{3}, \text{ 即 } R = 2\sqrt{3}, \text{ 因为 } M \text{ 为外心, 所以 } AM = 2\sqrt{3}, \text{ 与 } AM = 4 \text{ 矛盾, 故不能选①.}$$

21. 本小题主要考查椭圆的标准方程及简单几何性质, 直线与圆、椭圆的位置关系, 平面向量等基础知识; 考查运算求解能力, 逻辑推理能力, 直观想象能力和创新能力等; 考查数形结合思想, 函数与方程思想, 化归与转化思想等; 考查直观想象, 逻辑推理, 数学运算等核心素养; 体现基础性, 综合性与创新性. 满分 12 分.

解法一: (1) 以 O 为坐标原点, 椭圆 C 的长轴、短轴所在直线分别为 x 轴、 y 轴, 建立平面直角坐标系, 如图.1 分
 设椭圆的长半轴为 a , 短半轴为 b , 半焦距为 c ,

$$\text{依题意得 } \begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ b - \frac{\sqrt{6}}{3} = 1 - \frac{\sqrt{6}}{3}, \\ a^2 = b^2 + c^2, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a = \sqrt{2}, \\ b = 1, \\ c = 1, \end{cases} \dots\dots 3 \text{ 分}$$



所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$4 分

- (2) 因为直线 AB 与以 OA 为直径的圆的一个交点在圆 O 上,
 所以直线 AB 与圆 O 相切.5 分

(i) 当直线 AB 垂直于 x 轴时, 不妨设 $A\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right), B\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$,

此时 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$, 所以 $OA \perp OB$, 故以 AB 为直径的圆过点 O6 分

(ii) 当直线 AB 不垂直于 x 轴时, 设直线 AB 的方程为 $y = kx + m, A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$.

因为 AB 与圆 O 相切, 所以 O 到直线 AB 的距离 $\frac{|m|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$,

即 $3m^2 - 2k^2 - 2 = 0$7 分

由 $\begin{cases} y = kx + m, \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1, \end{cases}$ 得 $(2k^2 + 1)x^2 + 4kmx + 2m^2 - 2 = 0$,8 分

所以 $x_1 + x_2 = \frac{-4km}{2k^2 + 1}, x_1x_2 = \frac{2m^2 - 2}{2k^2 + 1}$,9 分

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= x_1x_2 + y_1y_2 = x_1x_2 + (kx_1 + m)(kx_2 + m) = (1 + k^2)x_1x_2 + km(x_1 + x_2) + m^2 \\ &= (1 + k^2)\left(\frac{2m^2 - 2}{2k^2 + 1}\right) + km\left(\frac{-4km}{2k^2 + 1}\right) + m^2 \end{aligned}$$

$$= \frac{(1+k^2)(2m^2-2)+km(-4km)+m^2(2k^2+1)}{2k^2+1}$$

$$= \frac{3m^2-2k^2-2}{2k^2+1} = 0,$$

所以 $OA \perp OB$ ，故以 AB 为直径的圆过点 O 。

综上，以 AB 为直径的圆过点 O 。 12 分

解法二：(1) 同解法一。 4 分

(2) 因为直线 AB 与以 OA 为直径的圆的一个交点在圆 O 上，
所以直线 AB 与圆 O 相切。 5 分

设直线 AB 与圆 O 相切于点 $M(x_0, y_0)$ 。

(i) 当 $y_0 = 0$ 时，直线 AB 垂直于 x 轴，不妨设 $A\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right), B\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ ，

此时 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ ，所以 $OA \perp OB$ ，故以 AB 为直径的圆过点 O 。 6 分

(ii) 当 $y_0 \neq 0$ 时，直线 AB 的方程为 $y - y_0 = -\frac{x_0}{y_0}(x - x_0)$ ，因为 $x_0^2 + y_0^2 = \frac{2}{3}$ ，

所以直线 AB 的方程为 $y = -\frac{x_0}{y_0}x + \frac{2}{3y_0}$ 。 7 分

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ，由 $\begin{cases} y = -\frac{x_0}{y_0}x + \frac{2}{3y_0} \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \end{cases}$ 得

$(18x_0^2 + 9y_0^2)x^2 - 24x_0x + 8 - 18y_0^2 = 0$ ， 8 分

所以 $x_1 + x_2 = \frac{24x_0}{18x_0^2 + 9y_0^2}, x_1x_2 = \frac{8 - 18y_0^2}{18x_0^2 + 9y_0^2}$ ， 9 分

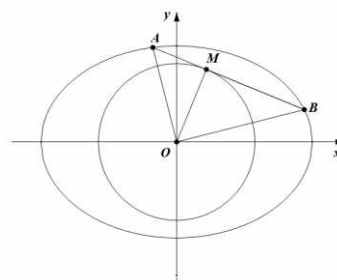
因为 $x_0^2 + y_0^2 = \frac{2}{3}$ ，所以 $x_1 + x_2 = \frac{24x_0}{6 + 9x_0^2}, x_1x_2 = \frac{18x_0^2 - 4}{6 + 9x_0^2}$ ，

$$|OA|^2 + |OB|^2 - |AB|^2 = (|OM|^2 + |AM|^2) + (|OM|^2 + |BM|^2) - (|AM| + |BM|)^2$$

$$= 2|OM|^2 - 2|AM||BM| = \frac{4}{3} - 2|AM||BM|$$

$$= \frac{4}{3} - 2 \left[\sqrt{1 + \left(-\frac{x_0}{y_0}\right)^2} |x_2 - x_0| \right] \cdot \left[\sqrt{1 + \left(-\frac{x_0}{y_0}\right)^2} |x_0 - x_1| \right]$$

$$= \frac{4}{3} - 2 \left[1 + \left(-\frac{x_0}{y_0}\right)^2 \right] [-x_1x_2 + (x_1 + x_2)x_0 - x_0^2]$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{4}{3} - 2 \left[1 + \left(\frac{-x_0}{y_0} \right)^2 \right] \left(-\frac{18x_0^2 - 4}{6 + 9x_0^2} + \frac{24x_0^2}{6 + 9x_0^2} - x_0^2 \right) \\
 &= \frac{4}{3} - 2 \left(1 + \frac{x_0^2}{\frac{2}{3} - x_0^2} \right) \left(-\frac{18x_0^2 - 4}{6 + 9x_0^2} + \frac{24x_0^2}{6 + 9x_0^2} - x_0^2 \right) \\
 &= \frac{4}{3} - 2 \cdot \frac{2}{2 - 3x_0^2} \cdot \frac{4 - 9x_0^4}{6 + 9x_0^2} \\
 &= \frac{4}{3} - \frac{4}{3} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

所以 $|OA|^2 + |OB|^2 = |AB|^2$, 即 $OA \perp OB$, 故以 AB 为直径的圆过点 O .

综上, 以 AB 为直径的圆过点 O 12 分

解法三: (1) 同解法一. 4 分

(2) 因为直线 AB 与以 OA 为直径的圆的一个交点在圆 O 上,

所以直线 AB 与圆 O 相切. 5 分

(i) 当直线 AB 不垂直于 x 轴时, 设直线 AB 的方程为 $y = kx + m$, $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$.

因为 AB 与圆 O 相切, 所以 O 到直线 AB 的距离 $\frac{|m|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$,

即 $3m^2 - 2k^2 - 2 = 0$ 6 分

由 $\begin{cases} y = kx + m, \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1, \end{cases}$ 得 $(2k^2 + 1)x^2 + 4kmx + 2m^2 - 2 = 0$, 7 分

所以 $x_1 + x_2 = \frac{-4km}{2k^2 + 1}, x_1x_2 = \frac{2m^2 - 2}{2k^2 + 1}$, 8 分

$$y_1 + y_2 = k(x_1 + x_2) + 2m = \frac{2m}{2k^2 + 1},$$

$$y_1y_2 = (kx_1 + m)(kx_2 + m) = k^2x_1x_2 + mk(x_1 + x_2) + m^2 = \frac{m^2 - 2k^2}{2k^2 + 1},$$

$$x_1x_2 + y_1y_2 = \frac{2m^2 - 2}{2k^2 + 1} + \frac{m^2 - 2k^2}{2k^2 + 1} = \frac{3m^2 - 2k^2 - 2}{2k^2 + 1} = 0.$$

设 $P(x, y)$ 是以 AB 为直径的圆 N 上的任意一点,

由 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$, 得 $(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$, 10 分

化简得 $x^2 + y^2 - (x_1 + x_2)x - (y_1 + y_2)y + x_1x_2 + y_1y_2 = 0$,

故圆 N 的方程为 $x^2 + y^2 + \frac{4km}{2k^2 + 1}x - \frac{2m}{2k^2 + 1}y = 0$, 它过定点 O 11 分

(ii) 当直线 AB 垂直于 x 轴时, 不妨设 $A\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right), B\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$,

此时 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$, 所以 $OA \perp OB$, 故以 AB 为直径的圆过点 O .

综上, 以 AB 为直径的圆过点 O 12 分

解法四: (1) 同解法一. 4 分

(2) 因为直线 AB 与以 OA 为直径的圆的一个交点在圆 O 上,

所以直线 AB 与圆 O 相切. 5 分

(i) 当直线 AB 不垂直于 x 轴时, 设直线 AB 的方程为 $y = kx + m, A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$.

因为 AB 与圆 O 相切, 所以 O 到直线 AB 的距离 $\frac{|m|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$,

即 $3m^2 - 2k^2 - 2 = 0$ 6 分

由 $\begin{cases} y = kx + m, \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1, \end{cases}$ 得 $(2k^2 + 1)x^2 + 4kmx + 2m^2 - 2 = 0$, 7 分

所以 $x_1 + x_2 = \frac{-4km}{2k^2 + 1}, x_1x_2 = \frac{2m^2 - 2}{2k^2 + 1}$, 8 分

$y_1 + y_2 = k(x_1 + x_2) + 2m = \frac{2m}{2k^2 + 1}$,

以 AB 为直径的圆 N 的圆心为 $N\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$, 即 $\left(\frac{-2km}{2k^2 + 1}, \frac{m}{2k^2 + 1}\right)$.

半径 $r = \frac{|AB|}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{1+k^2}|x_2 - x_1|$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \frac{\sqrt{1+k^2}}{2} \cdot \sqrt{\frac{16k^2m^2}{(2k^2 + 1)^2} - \frac{8m^2 - 8}{2k^2 + 1}}$$

$$= \frac{\sqrt{1+k^2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{16k^2 - 8m^2 + 8}}{2k^2 + 1} = \frac{\sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{4k^2 - 2m^2 + 2}}{2k^2 + 1},$$

以 AB 为直径的圆的方程为

$$\left(x + \frac{2km}{2k^2 + 1}\right)^2 + \left(y - \frac{m}{2k^2 + 1}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{4k^2 - 2m^2 + 2}}{2k^2 + 1}\right)^2,$$

整理得 $x^2 + y^2 + \frac{4km}{2k^2 + 1}x - \frac{2m}{2k^2 + 1}y = 0$,

故以 AB 为直径的圆过定点 O 11 分

(ii) 当直线 AB 垂直于 x 轴时, 不妨设 $A\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right), B\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$,

此时 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$, 所以 $OA \perp OB$, 故以 AB 为直径的圆过点 O .

综上, 以 AB 为直径的圆过点 O 12 分

22. 本小题主要考查导数, 函数的单调性、零点、不等式等基础知识; 考查逻辑推理能力,

直观想象能力, 运算求解能力和创新能力等; 考查函数与方程思想, 化归与转化思想, 分类与整合思想等; 考查逻辑推理, 直观想象, 数学运算等核心素养; 体现基础性、综合性和创新性. 满分 12 分.

解法一: (1) 依题意, $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

由 $f(x) = \ln x - \frac{a+1}{x} (a \in \mathbf{R})$, 得 $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{a+1}{x^2} = \frac{x+a+1}{x^2}$,1 分

① 当 $a \geq -1$ 时, $f'(x) > 0$ 恒成立, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增;
.....2 分

② 当 $a < -1$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = -a-1$,

当 $x \in (0, -a-1)$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, -a-1)$ 单调递减;

当 $x \in (-a-1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-a-1, +\infty)$ 单调递增;

综上, 当 $a \geq -1$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增;

当 $a < -1$ 时, $f(x)$ 在 $(0, -a-1)$ 单调递减, 在 $(-a-1, +\infty)$ 单调递增.4 分

(2) 设 $h(x) = f(x) - g(x)$, 则 $h'(x) = f'(x) + a(x-3)e^{1-x} = \frac{x+a+1}{x^2} + \frac{a(x-3)}{e^{x-1}}$,
.....5 分

① 当 $x \geq 3$ 时, $h'(x) > 0$ 恒成立, 所以 $h(x)$ 在 $[3, +\infty)$ 单调递增,

又因为 $0 < a < \frac{5}{3}$, 所以 $h(3) = \ln 3 - \frac{a+1}{3} - \frac{a}{e^2} + 1 > \ln 3 - \frac{a}{e^2} > 1 - \frac{a}{e^2} > 0$,

所以 $h(x) > 0$, $h(x)$ 在 $[3, +\infty)$ 不存在零点;6 分

② 当 $0 < x < 3$ 时, 设 $\varphi(x) = e^{x-1} - x$, 则 $\varphi'(x) = e^{x-1} - 1$,

当 $0 < x < 1$ 时, $\varphi'(x) < 0$, 所以 $\varphi(x)$ 在 $(0, 1)$ 单调递减;

当 $1 < x < 3$ 时, $\varphi'(x) > 0$, 所以 $\varphi(x)$ 在 $(1, 3)$ 单调递增;

所以 $\varphi(x) \geq \varphi(1) = 0$, 即 $e^{x-1} \geq x$, 因为 $x > 0$, 所以 $\frac{1}{e^{x-1}} \leq \frac{1}{x}$,7 分

又因为 $0 < a < \frac{5}{3}$ 且 $0 < x < 3$, 所以 $a(x-3) < 0$, 所以 $\frac{a(x-3)}{e^{x-1}} \geq \frac{a(x-3)}{x}$,

所以 $h'(x) \geq \frac{x+a+1}{x^2} + \frac{a(x-3)}{x} = \frac{ax^2 + (1-3a)x + a+1}{x^2}$,8 分

当 $0 < a \leq \frac{1}{3}$ 时, 函数 $\delta(x) = ax^2 + (1-3a)x + a+1$ 的对称轴为 $x = \frac{3a-1}{2a} \leq 0$,

所以 $\delta(x)$ 在 $(0, 3)$ 单调递增, 所以 $\delta(x) > \delta(0) = a+1 > 0$,

所以 $h'(x) > 0$, 所以 $h(x)$ 在 $(0, 3)$ 单调递增;9 分

当 $\frac{1}{3} < a < \frac{5}{3}$ 时, $\Delta = (1-3a)^2 - 4a(a+1) = 5a^2 - 10a + 1 \leq -\frac{16}{9} < 0$,

所以 $\delta(x) > 0$, 所以 $h'(x) > 0$, 所以 $h(x)$ 在 $(0,3)$ 单调递增; 10 分

综上所述可知, 当 $0 < a < \frac{5}{3}$ 时, 均有 $h(x)$ 在 $(0,3)$ 单调递增,

又因为 $h(1) = -a - 1 + a + 1 = 0$, 所以 $h(x)$ 在 $(0,3)$ 恰有一个零点 1, 11 分

故当 $0 < a < \frac{5}{3}$ 时, $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 恰有一个零点 1,

因此不存在 x_1, x_2 , 且 $x_1 \neq x_2$, 使得 $f(x_i) = g(x_i) (i=1,2)$ 12 分

解法二: (1) 同解法一; 4 分

(2) 记 $F(x) = f(x) - g(x)$, 则 $F(x) = \ln x - \frac{a+1}{x} - a(x-2)e^{1-x} + 1$,

则 $F'(x) = \frac{1}{x} + \frac{a+1}{x^2} + a(x-3)e^{1-x} = \frac{(x+a+1)e^x + ae(x-3)x^2}{x^2e^x}$, 5 分

记 $h(x) = (x+a+1)e^x + ae(x-3)x^2 = [e^x + e(x-3)x^2]a + (x+1)e^x$, 7 分

设 $\varphi(x) = e^x - ex$, 则 $\varphi'(x) = e^x - e$,

当 $0 < x < 1$ 时, $\varphi'(x) < 0$, 所以 $\varphi(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减;

当 $x > 1$ 时, $\varphi'(x) > 0$, 所以 $\varphi(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递增;

所以 $\varphi(x) \geq \varphi(1) = 0$, 即 $e^x \geq ex$, 8 分

所以, $h\left(\frac{5}{3}\right) = \left(x + \frac{8}{3}\right)e^x + \frac{5}{3}e(x-3)x^2 \geq \left(x + \frac{8}{3}\right)ex + \frac{5}{3}e(x-3)x^2 = \frac{1}{3}ex(5x^2 - 12x + 8)$,

因为 $\Delta = 12^2 - 4 \times 5 \times 8 = -16 < 0$, 所以 $5x^2 - 12x + 8 > 0$, 所以 $h\left(\frac{5}{3}\right) > 0$, 9 分

又 $h(0) = (x+1)e^x > 0$

所以当 $0 < a < \frac{5}{3}, x > 0$ 时, $h(x) > 0$, 10 分

所以 $F'(x) > 0$, $F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 又因为 $F(1) = 0$,

所以 $F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上恰有 1 个零点 1, 11 分

因此不存在 x_1, x_2 , 且 $x_1 \neq x_2$, 使得 $f(x_i) = g(x_i) (i=1,2)$ 12 分

解法三: (1) 同解法一;

(2) 设 $h(x) = f(x) - g(x)$, 则 $h'(x) = f'(x) + a(x-3)e^{1-x} = \frac{x+a+1}{x^2} + \frac{a(x-3)}{e^{x-1}}$,

..... 5 分

- ①当 $x \geq 3$ 时, $h'(x) > 0$ 恒成立, 所以 $h(x)$ 在 $[3, +\infty)$ 单调递增,
 又因为 $0 < a < \frac{5}{3}$, 所以 $h(3) = \ln 3 - \frac{a+1}{3} - \frac{a}{e^2} + 1 > \ln 3 - \frac{a}{e^2} > 1 - \frac{a}{e^2} > 0$,
 所以 $h(x) > 0$, $h(x)$ 在 $[3, +\infty)$ 不存在零点;6 分
- ②当 $0 < x < 3$ 时, 设 $\varphi(x) = e^{x-1} - x$, 则 $\varphi'(x) = e^{x-1} - 1$,
 当 $0 < x < 1$ 时, $\varphi'(x) < 0$, 所以 $\varphi(x)$ 在 $(0, 1)$ 单调递减;
 当 $1 < x < 3$ 时, $\varphi'(x) > 0$, 所以 $\varphi(x)$ 在 $(1, 3)$ 单调递增;
 所以 $\varphi(x) \geq \varphi(1) = 0$, 即 $e^{x-1} \geq x$, 因为 $x > 0$, 所以 $\frac{1}{e^{x-1}} \leq \frac{1}{x}$,7 分
 又因为 $0 < a < \frac{5}{3}$ 且 $0 < x < 3$, 所以 $a(x-3) < 0$, 所以 $\frac{a(x-3)}{e^{x-1}} \geq \frac{a(x-3)}{x}$,
 所以 $h'(x) \geq \frac{x+a+1}{x^2} + \frac{a(x-3)}{x} = \frac{a(x^2-3x+1)+x+1}{x^2}$,8 分
 设 $\delta(a) = a(x^2-3x+1)+x+1$, 则 $\delta(0) = x+1 > 0$,9 分

$$\delta\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{5}{3}(x^2-3x+1)+x+1 = \frac{5x^2-12x+8}{3} = \frac{5\left(x-\frac{6}{5}\right)^2 + \frac{4}{5}}{3} > 0,$$
 所以 $\delta(a) > 0$, 所以 $h'(x) > 0$,
 综上所述, 当 $0 < a < \frac{5}{3}$ 时, 均有 $h(x)$ 在 $(0, 3)$ 单调递增,10 分
 又因为 $h(1) = -a-1+a+1 = 0$, 所以 $h(x)$ 在 $(0, 3)$ 恰有一个零点 1,11 分
 故当 $0 < a < \frac{5}{3}$ 时, $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 恰有一个零点 1,
 因此不存在 x_1, x_2 , 且 $x_1 \neq x_2$, 使得 $f(x_i) = g(x_i) (i=1, 2)$12 分

数学试题勘误

- 1、选择题第 1 题中的“则 $A = B$ ”，改为“则 $A \cap B =$ ”
- 2、选择题第 12 题中的“ $(n=1, 2, 3)$ ”改为“ $(n=1, 2, 3, \dots)$ ”
- 3、选择题第 19 题
“平面 α 平面 $VAB=l$ ”改为“平面 $\alpha \cap$ 平面 $VAB=l$ ”

